

Introduction à la finance mathématique (MS316)

Enseignant : Idris KHARROUBI - Sorbonne Université

premier semestre

Cours : 18 heures

TP : 12 heures

Objectifs

L'objectif de ce cours est de présenter les concepts mathématiques utilisés pour la modélisation et la valorisation des produits dérivés en finance. La présentation du cours sera mathématiquement rigoureuse, mais certains résultats de calcul stochastique seront admis, pour être démontrés plus tard dans le cours de calcul stochastique de 3ème année. Après l'obtention d'une définition mathématique de la notion d'arbitrage sur un marché financier, nous étudierons dans la première partie du cours les modèles discrets à espace d'états fini, qui donnent de bonnes intuitions pour l'étude des modèles en temps continu. A l'aide de la théorie du calcul stochastique, nous présenterons dans la deuxième partie du cours la valorisation d'actifs dans le cadre du modèle de Black & Scholes. Il est conseillé de suivre le cours d'Introduction aux processus pour mieux assimiler les notions de calcul stochastique et de suivre en parallèle le cours de simulation.

Principaux acquis de la formation : à l'issue du cours, l'étudiant saura

Donner la définition d'un arbitrage sur un marché financier, Retrouver la formule de parité Call Put en AOA.

Comprendre le lien entre l'absence d'arbitrage et l'existence d'une probabilité risque-neutre

Représenter mathématiquement un prix d'option et sa stratégie de couverture dans les modèles binomiaux et le modèle de Black Scholes.

Définir le mouvement Brownien et en énoncer ses principales propriétés.

Appliquer la formule d'Ito à un processus de dimension 1. Vérifier ainsi par exemple qu'un processus est une martingale.

Plan

1. Probabilité et Arbitrage. Le marché financier comme milieu aléatoire. Définition mathématique de l'arbitrage. Conséquences de l'absence d'opportunités d'arbitrage. Applications : Valorisation d'un contrat Forward et Formule de Parité Call Put.

2. Modèle discret à une période. Hypothèses sur le marché financier. Absence d'arbitrage et complétude du marché. Valorisation sous la probabilité risque neutre. Optimisation de portefeuille et notions d'équilibre économique.

3. Modèle discret à n périodes. Le modèle de marché. Portefeuille de réplcation. Valorisation risque neutre des options. Modèle binomial à n périodes. Le modèle de Black Scholes comme limite.

4. Calcul stochastique. Processus, Filtration et Martingale. Mouvement Brownien : définition et propriétés. Variation quadratique, intégrale stochastique, Formule d'Ito et Processus d'Ito. Introduction à la notion d'Equation Différentielle Stochastique.

5 Marchés financiers en temps continu. Modèle de Black-Scholes. Dynamique de prix et Actualisation. Théorème de Girsanov et valorisation risque neutre, Représentation de Feynman-Kac et EDP de pricing. Couverture en Delta. Limites du modèle de Black Scholes : le smile de volatilité. Application : valorisation d'un Call Européen (formule fermée, arbre, EDP, Monte Carlo). Optimisation de portefeuille en temps continu.

Références

LAMBERTON D. & LAPEYRE B., (1997) : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Ellipses [17 LAM 00 A]

SHREVE S. (1997) : Stochastic calculus and finance, Lecture notes [78 SHR 00 A]

DANA & JEANBLANC (1998) : Marchés financiers en temps continu - Valorisation et équilibre , Economica [78 DAN 00 A]

OKSENDAL B. (1998) : Stochastic differential equations, Springer [17 OKS 00 A]